

高三数学参考答案及评分标准

2021. 4

一、单项选择题(每小题 5 分,共 40 分)

1-4 ACDD 5-8 ABCD

二、多项选择题(每小题 5 分,选对但不全的得 2 分,共 20 分)

9. BD 10. AD 11. BCD 12. ABD

三、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. 15 14. 1, 8, 10, 64 任选其一 15. $\frac{7}{2}$ 16. [1, 5]

四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17. 解析:(1)由已知得,“锻炼时间达标”的频率为: $(0.01 + 0.005) \times 10 = 0.15$,
所以“锻炼时间达标”学生共有 $2000 \times 0.15 = 300$ 人. 3 分
(2)由所给数据,可得 2×2 列联表为:

是否达标 性别	锻炼时间达标	锻炼时间未达标	合计
男	10	50	60
女	5	35	40
合计	15	85	100

..... 6 分

将 2×2 列联表中的数据代入公式计算,得:

$$K^2 = \frac{100 \times (10 \times 35 - 5 \times 50)^2}{15 \times 85 \times 60 \times 40} = \frac{50}{153} \approx 0.327 < 2.706 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

所以没有 90% 的把握认为“锻炼时间达标”与性别有关. 10 分

18. 解:过点 A 作 $AE \perp BC$,垂足为 E,则 $AE = 4 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$,

当 $AD = \sqrt{5}$ 时, $AD < AE$,所以方案①对应 $\triangle ABD$ 无解,..... 2 分

当 $AD = \sqrt{15}$ 时, $AE < AD < AB < AC$,所以方案②对应 $\triangle ABD$ 有两解, 4 分

当 $AD = 2\sqrt{7}$ 时, $AB < AD < AC$,所以方案③对应 $\triangle ABD$ 只有一解. 6 分

由方案③知 $AD = 2\sqrt{7}$,设 $BD = x$,

所以在 $\triangle ABD$ 中由余弦定理得: $(2\sqrt{7})^2 = 4^2 + x^2 - 2 \times 4 \times x \times \cos 60^\circ$, 9 分

即 $x^2 - 4x - 12 = 0$,

解得 $x = 6$ 或 $x = -2$ (舍)

又因为在 $\triangle ABC$ 中易得 $BC = 8$, $BD = 6 < BC$,符合题意.

所以 BD 的长为 6. 12 分

19. 解:(1)因为四边形 ABCD 为矩形,所以 $AD \perp CD$,

又因为 $PD \perp$ 平面 ABCD,所以 $PD \perp CD$,

所以 $CD \perp$ 平面 PAD, 2 分

又 $PA \subset$ 平面 PAD,

所以 $PA \perp CD$,又因为 $CM \perp PA$,

所以 $PA \perp$ 平面 CMD,又 $DM \subset$ 平面 CMD,

所以 $PA \perp DM$ 4 分

(2)因为 $PD \perp$ 平面 ABCD,

所以 $\angle PAD$ 为 PA 与平面 ABCD 所成角,即 $\angle PAD = 30^\circ$,

又因为 $PD = 1$,所以 $AD = \sqrt{3}$, 6 分

分别以直线 DA, DC, DP 为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示空间直角坐标系,

因为 $AD = \sqrt{3}$, $PD = CD = 1$,

因为 $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{DA}$,所以 $PN = \sqrt{3}$,

令 $PQ = \lambda (0 \leq \lambda \leq \sqrt{3})$,则 $D(0, 0, 0)$, $A(\sqrt{3}, 0, 0)$,
 $C(0, 1, 0)$, $Q(\lambda, 0, 1)$, 7 分

所以 $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$, $\overrightarrow{CQ} = (\lambda, -1, 1)$,

设 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$ 为平面 ACQ 的一个法向量,

由 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{CQ} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 0 \\ \lambda x - y + z = 0 \end{cases}$,取 $x = 1$,

则 $\mathbf{n}_1 = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3} - \lambda)$ 9 分

因为 $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 0)$ 是平面 PDC 的一个法向量. 10 分

所以 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3 + (\sqrt{3} - \lambda)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda - \sqrt{3})^2 + 4}}$,

因为 $0 \leq \lambda \leq \sqrt{3}$,所以当 $\lambda = \sqrt{3}$ 时, $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle$ 有最大值 $\frac{1}{2}$.

所以所求二面角的余弦值的最大值为 $\frac{1}{2}$ 12 分

20. 解:(1)因为 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{e^x}$,

所以 $f'(x) = \frac{(2ax + b)e^x - (ax^2 + bx + c)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-ax^2 + (2a - b)x + b - c}{e^x}$ 1 分

因为 $e^x > 0$,

所以 $f'(x) \geq 0$ 的解集与 $-ax^2 + (2a - b)x + b - c \geq 0$ 解集相同,

同为 $x \in [0, 1]$.

所以有 $\begin{cases} a > 0 \\ \frac{2a - b}{a} = 1 \\ \frac{b - c}{-a} = 0 \end{cases}$ 解得 $a = b = c$, 3 分

所以 $f(x) = \frac{a(x^2 + x + 1)}{e^x}$, $f'(x) = \frac{-ax^2 + ax}{e^x} (a > 0)$

因为 $a > 0$,所以当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$,函数 $f(x)$ 单调递减,

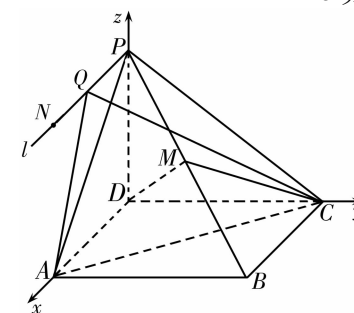
当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$,函数 $f(x)$ 单调递增,

且 $f'(1) = 0$,所以在 $x = 1$ 处 $f(x)$ 取得极大值为 $\frac{3}{e}$,

即 $f(1) = \frac{3a}{e} = \frac{3}{e}$,所以 $a = 1$,即 $a = b = c = 1$, 6 分

所以 $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{e^x}$, $f'(x) = \frac{-x^2 + x}{e^x}$.

所以 $f(-1) = \frac{1}{e^{-1}} = e$, $f'(-1) = \frac{-2}{e^{-1}} = -2e$.



所以函数在点 $(-1, f(-1))$ 处切线方程为: $y - e = -2e(x + 1)$ 即 $y = -2ex - e$ 8 分

(2) 由(1)知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 且 $f(0) = \frac{1}{e} = 1$,

所以满足 $f(x_0) = 1 (x_0 \neq 0)$ 的 x_0 存在于区间 $(1, +\infty)$.
 所以当 $0 < m < x_0$ 时, 由函数的单调性易知, $f(x)$ 的最小值为 $f(0) = 1$ 10 分
 当 $m \geq x_0$ 时, $f(m) \leq f(x_0) = f(0) = 1$,

所以此时 $f(x)$ 的最小值为 $f(m) = \frac{m^2 + m + 1}{e^m}$,

综上所述: $f(x)$ 在区间 $(-\infty, m]$ 上的最小值为 $\begin{cases} 1, & 0 < m \leq x_0 \\ \frac{m^2 + m + 1}{e^m}, & m > x_0 \end{cases}$ 12 分

21. 解: 设圆的圆心为 (a, b)

由圆与抛物线准线 l 相切, 得 $\frac{p}{2} + a = \frac{3}{2}$,

又因为圆过抛物线的焦点 F , 故 $a = \frac{p}{4}$, 2 分

所以 $\frac{p}{2} + \frac{p}{4} = \frac{3}{2}$, 解得 $p = 2$,

即 C 的方程为 $y^2 = 4x$ 4 分

(2) 由题意知 $F(1, 0)$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$,

由题意知, 直线 AB 的斜率一定存在且不为0,

设直线 $AB: y = k(x - 1)$, 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 联立得:

$$ky^2 - 4y - 4k = 0$$

从而 $\Delta = 16 + 16k^2 > 0, y_1 + y_2 = \frac{4}{k}, y_1 \cdot y_2 = -4$, 6 分

因为 M 为线段 AB 的中点,

$$\text{所以 } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2}{k}, x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{8} = \frac{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2}{8} = \frac{2}{k^2} + 1,$$

即 $M(\frac{2}{k^2} + 1, \frac{2}{k})$, 7 分

直线 AO 的方程为 $y = \frac{4}{y_1}x$, 可求 P 点的横坐标 $x_P = \frac{y_1}{2k}$;

同理 Q 点的横坐标 $x_Q = \frac{y_2}{2k}$,

因为 $|PQ| = \frac{1}{3}|MN|$,

$$\text{即 } |x_P - x_Q| = \frac{1}{3}(x_0 - x_N),$$

$$\text{即 } \left| \frac{y_1}{2k} - \frac{y_2}{2k} \right| = \frac{1}{3}(x_0 - x_N),$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2}}{2k} = \frac{\sqrt{\frac{16}{k^2} + 16}}{2k} = \frac{2}{3}(\frac{1}{k^2} + 1), \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

解得: $k = \pm 2\sqrt{2}$,

故直线 AB 的方程为: $2\sqrt{2}x - y - 2\sqrt{2} = 0$ 或 $2\sqrt{2}x + y - 2\sqrt{2} = 0$ 12 分

22. 解: (1) $x = 2$ 时, $a_n = 2^n$,

若存在三项 $2^r, 2^s, 2^t$ 成等差数列($r < s < t, r, s, t \in \mathbf{N}^+$),

则有: $2 \cdot 2^s = 2^r + 2^t$, 2 分
 两边除以 2^r 得: $2 \cdot 2^{s-r} = 1 + 2^{t-r}$,

由 $s - r \in \mathbf{N}^+, t - r \in \mathbf{N}^+$,

故上式左边为偶数, 右边为奇数, 矛盾.

所以, 不存在三项使其成等差数列. 4 分

$$(2) f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2},$$

$$f'_n(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n},$$

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'_n(x) > 0, f_n(x)$ 单调递增, 5 分

由于 $f_1(1) = 0$, 当 $x \geq 2$ 时, $f_n(1) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} > 0$,

$$f_n\left(\frac{2}{3}\right) = -1 + \frac{2}{3} + \left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2^2} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3^2} + \dots + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n^2}\right]$$

$$\leq -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{\frac{4}{9} [1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}]}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < 0.$$

故存在唯一 $x_n \in [\frac{2}{3}, 1]$, 使 $f_n(x_n) = 0$ 8 分

(3) 对 $\forall p \in \mathbf{N}^+$, 由(2)中, x_n 构成数列 $\{x_n\}$,

当 $x > 0$ 时, $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} > f_n(x)$,

故 $f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$,

由于 $f_{n+1}(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

故 $x_{n+1} < x_n$ 即 $\{x_n\}$ 为单调递减数列,

因此对任意 $p \in \mathbf{N}_+, x_n - x_{n+p} > 0$, 10 分

$$\text{又 } f_n(x_n) = -1 + x_n + \frac{x_n^2}{2^2} + \dots + \frac{x_n^n}{n^2} = 0$$

$$f_{n+p}(x_{n+p}) = -1 + x_{n+p} + \frac{x_{n+p}^2}{2^2} + \dots + \frac{x_{n+p}^n}{n^2} + \dots + \frac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2} = 0$$

两式相减

$$x_n - x_{n+p} = \frac{x_{n+p}^2 - x_n^2}{2^2} + \frac{x_{n+p}^3 - x_n^3}{3^2} + \dots + \frac{x_{n+p}^n - x_n^n}{n^2} + \frac{x_{n+p}^{n+1}}{(n+1)^2} + \dots + \frac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2}$$

$$< \frac{x_{n+p}^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{x_{n+p}^{n+2}}{(n+2)^2} + \dots + \frac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2} < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$$< \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},$$

故 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_n - x_{n+p} < \frac{1}{n}$ 12 分